الثلاثاء 24 / 4 / 2018م — المحاضرة العاشرة ـ 10

قياس لبيغ في R وفي R^n

1] قياس لبيغ في R: هو تعميم مفهوم الطول

مبرهنة: ضع بنصف حلقة R(S)

$$S = \{]a,b] : -\infty < a \leq b < +\infty \} \subset 2^R$$

نعرف دالة المجموعات M بالشكل:

$$M : S \longrightarrow]-\infty, +\infty]$$

$$]a,b] \longrightarrow M(]a,b]) = b-a$$

عندئذ تكون M قياساً على S

الإثبات محذوف غير مطلوب.

ملاحظة:

اعتماداً على القياس M السابق سنشكل قياساً خارجياً سنرمز له بـ λ^* وبالتالي سنحصل على صف المجموعات القيوسة وفق λ^* هذا

ولهذا بدوره يشكل σ-جبر على R كما أن مقصور λ^* عليه يعطينا قياساً λ أي أن: $\lambda = \lambda^*/_{M_{\lambda^*}}$

ونطلق عليه قياس لبيغ في R

ويتم ذلك كما يلي:

ليكن $M : S \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ القياس الوارد في المبرهنة أعلاه:

ولتكن دالة المجموعات

$$\lambda^* : 2^R \longrightarrow]-\infty, +\infty]$$

$$E \longrightarrow \lambda^*(E)$$

معرفة بالشكل:

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} M(]a_n, b_n]) : E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}]a_n, b_n] ;]a_n, b_n] \in S \right\}$$

$$= \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) ; E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}]a_n, b_n] ;]a_n, b_n] \in S \right\}$$

1]

أي أنّ $\inf$ يؤخذ على كل التغطيات الممكنة للمجموعة E
(حيث $E \in 2^{\mathbb{R}}$) بمجالات من نصف الحلقة S

وهنا نلاحظ ما يلي:

1] الدالة λ^* معرفة جيداً (دوماً) لأنه من أجل كل مجموعة
$E \in 2^{\mathbb{R}}$ توجد تغطية لـ E بمجالات من نصف الحلقة
مثلاً: $\{]-n, +n] \}_{n=1}^{\infty}$

2] $\lambda^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(]a_n, b_n]) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n)$

3] إذا كانت المجموعة E محتواة في مجال $]a,b] \in S$ فيكون
$\lambda^*(E) \leq b - a$

وبشكل خاص: إذا كانت المجموعة E محدودة فيوجد
مجال محدود $]a,b] \in S$ بحيث يكون
$\lambda^*(E) \leq b - a < +\infty$

مبرهنة (2)

λ^* (الواردة أعلاه) قياس خارجي على $2^{\mathbb{R}}$

الإثبات:

شرط ①: بما أن $\emptyset =]a,a]$ فيكون $\lambda^*(\emptyset) = a - a = 0$

شرط ②: لتكن $E, G \in 2^{\mathbb{R}}$ بحيث أن $E \subset G$
عندئذٍ كل تغطية لـ G هي بنفس الوقت تغطية لـ E
وبالتالي فإن تغطيات E أكثر (أكبر) من تغطيات G
لذلك يكون: $\lambda^*(E) \leq \lambda^*(G)$

أي أن λ^* دالة مطردة

/ /

شرح ③ اذا كانت $E_1, E_2, \ldots \in 2^R$ فيكون

$$\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(E_n)$$

الاثبات غير مطلوب.

لذلك يكون λ^* قياساً خارجياً على 2^R

ملاحظة:

الآن λ^* قياس خارجي على 2^R فيوجد صف مجموعات قيوسة بمعنى λ^* وسوف نرمز له ب $\ell = M_{\lambda^*}$

ونسميه صف المجموعات المقيوسة حسب ليبيغ

وكل مجموعة $E \in \ell$ تسمى مجموعة ليبيغية

اما المقصود: $\lambda = \lambda^*|$ فيعرف قياساً نسميه $M_{\lambda^*} = \ell$

قياس ليبيغ في R

وهذا القياس تحدد القياس $\mu : S \to]-\infty, +\infty]$

الى القياس $\lambda : \ell \to]-\infty, +\infty]$

حيث ان مثلك:

1" اذا كانت المجموعة $E =]a, b]$ فيكون قياسها هو (طول المجال) $\lambda(E) = \lambda(]a, b]) = b - a$

2" اذا كانت $E = \{x\}$ مجموعة احادية العنصر تكون E مجموعة ليبيغية (مقيوسة حسب ليبيغ) وقياسها

$$\lambda(E) = \lambda(\{x\}) = 0$$

3" اذا كانت $E = \{x_1, x_2, \ldots\}$ مجموعة معدودة على الاكثر فيكون

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\} \in \ell$$

اي ان المجموعة E مقيوسة حسب ليبيغ وقياسها هو:

$$\lambda(E) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\{x\}) = 0$$

/ /

4" المجموعات N, Z, Q

هي مجموعات لبيغية (قابلة للقياس حسب لبيغ)

ومقياسها: $\lambda(N) = \lambda(Z) = \lambda(Q) = 0$

لأنها معدودة.

5": بما أن $\mathcal{L}$ يشكل σ-جبر على R فإن:

$R \in \mathcal{L} \quad , \quad \emptyset \in \mathcal{L}$

لذلك فإن كلاً من R و $\emptyset$ هي مجموعات قابلة للقياس حسب لبيغ

ومقياسها $\lambda(\emptyset) = 0 \quad , \quad \lambda(R) = +\infty$

6"

قياس لبيغ لأي مجال يساوي طول هذا المجال لأن:

$\lambda([a,b]) = \lambda(]a,b] \cup \{a\}) = \lambda(]a,b]) + \lambda(\{a\})$

$= b - a - 0 = b - a$

وكذلك:

$\lambda(]a,b[) = \lambda(]a,b] \setminus \{b\}) = \lambda(]a,b]) + \lambda(\{b\})$

$= b - a - 0 = b - a$

وكذلك:

$\lambda([a,b[) = b - a \quad , \quad \lambda(]a,b]) = b - a$

مبرهنة (3):

لتكن B_R جبر بوريل في R عندئذ يكون:

$S \subsetneq B \subsetneq \mathcal{L} \subsetneq 2^R$

(إضافة لذلك توجد مجموعات جزئية من R ليست قابلة للقياس حسب لبيغ، وتوجد مجموعات قابلة للقياس حسب لبيغ لكنها ليست بوريلية، وتوجد مجموعات بوريلية ليست مجالات من الشكل $]a,b]$)

/ /

مراجعة

قياس لبيغ λ تام

ملاحظة:

قياس لبيغ λ صامد أمام الانسحاب هذا يعني أنه

اذا كانت E مجموعة قيوسة حسب لبيغ وعرفنا الانزياح

بمقدار x بالشكل

$$E + x = \{ e + x \, ; \, e \in E \}$$

فتكون E + x مجموعة قيوسة حسب لبيغ كما أنه:

$$\lambda(E + x) = \lambda(E)$$

واذا ضربنا α عدد حقيقي

$$\alpha . E = \{ \alpha . e \, ; \, e \in E \}$$

فيكون

$$\lambda(\alpha . E) = |\alpha| . \lambda(E)$$

مثال:

لتكن $E = N$ مجموعة الاعداد الطبيعية:

$$N = \{1, 2, 3, \ldots \}$$

عندئذ يكون

$$N + \frac{1}{2} = \{ 1 + \frac{1}{2} \, , \, 2 + \frac{1}{2} \, , \, 3 + \frac{1}{2} , \ldots \}$$

$$= \{ \frac{3}{2} \, , \, \frac{5}{2} \, , \, \frac{7}{2} \, , \, \ldots \}$$

وكذلك:

$$\lambda(N + \frac{1}{2}) = \lambda(N) = 0$$

لأن N مجموعة معدودة وقياس لبيغ = 0

ومن أجل $\alpha = \frac{3}{4}$ أو $\alpha = -2$ يكون:

$$\frac{3}{4} N = \{ \frac{3}{4}(1) \, , \, \frac{3}{4}(2) \, , \ldots \}$$

$A \sim B \Rightarrow$ لها نفس القدرة A, B

$A \overset{\text{تقابل}}{\longleftrightarrow} B$

$-2N = \{-2(1), -2(2), \ldots\}$

وتكون.

$\lambda(\frac{3}{4}N) = |\frac{3}{4}| \lambda(N) = 0$

$\lambda(-2N) = |-2| \lambda(N) = 0$

ملاحظة:

وجدنا سابقاً أنه كل مجموعة جزئية معدودة من R تكون متورسة حسب لبنغ ومقياسها صفر

سؤال:

إذا كانت المجموعة $E \subset 2^R$ متورسة حسب لبنغ ومقياسها صفر فهل تكون E معدودة؟

الجواب:

لا لأنه مجموعة كانتور وهي متورسة حسب لبنغ ومقياسها صفر لكنها غير معدودة ومنها التي نتعرف عليها

مجموعة كانتور:

نتطلق من المجموعة $E = [0, 1]$

نقسم المجال $[0, 1]$ إلى ثلاثة أجزاء بواسطة النقطتين $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$

نحذف المجال المفتوح الأوسط $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$ فيبقى لدينا مجالان مغلقان هما $[0, \frac{1}{3}], [\frac{2}{3}, 1]$

نقسم كل منهما إلى ثلاثة أقسام متساوية ، نحذف المجال المفتوح الأوسط في كل منهما:

أي نحذف المجالات $]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}[$, $]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}[$

فيبقى لدينا 4 مجالات مغلقة وهي:

$[0, \frac{1}{9}], [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}], [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}], [\frac{8}{9}, 1]$

/ /

من جديد نقسم كل مجال من الستة المجالات المتبقية إلى ثلاثة أقسام متساوية
ونحذف المجال الأوسط المفتوح . وهكذا
فيكون لدينا المجموعات المحذوفة :

$G_1 =]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$

$G_2 =]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}[\cup]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}[$

$G_3 =]\frac{1}{27}, \frac{2}{27}[\cup]\frac{3}{27}, \frac{6}{27}[\cup]\frac{7}{27}, \frac{8}{27}[$

$\cup]\frac{9}{27}, \frac{18}{27}[\cup]\frac{19}{27}, \frac{20}{27}[\cup]\frac{21}{27}, \frac{24}{27}[$

مجموعة كانتور هي :

$C = [0,1] \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \right)$

وهي مجموعة مقيسة حسب لبيغ
وقياسها $\lambda(C) = 0$

خواص مجموعة كانتور C :

① $\lambda(C) = 0$

② غير معدودة ولها قدرة المستمر أي $C \sim [0,1]$

③ تتألف C من الأعداد $x \in [0,1]$ التي لها التمثيل الثلاثي الوحيد

$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$, $a_n \in \{0, 2\}$

④ C مجموعة مغلقة (متراصة كونها محدودة)

⑤ C كثيفة من لا شيء

⑥ C كقطعة أنها : $C = \frac{1}{3} C \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} C \right)$

7) ليس له نقاط داخلية
8) غير كثيفة في أي مكان من R
9) ليس له نقاط معزولة.

* قياس لبيغ في R^n

فيما تقدم عرفنا قياساً $M : S \to]-\infty, +\infty]$ على نصف
الحلقة R بالشكل:

$$M(]a,b]) = b-a$$

ونعلم أن صف المجموعات:

$$S^n = \{ \overset{n}{\underset{i=1}{X}}]a_i, b_i] \; ; \; -\infty < a_i \leq b_i < +\infty \}$$

يشكل نصف حلقة على R^n لذلك يمكن تعريف قياس بالشكل

$$M^n : S^n \to]-\infty, +\infty]$$

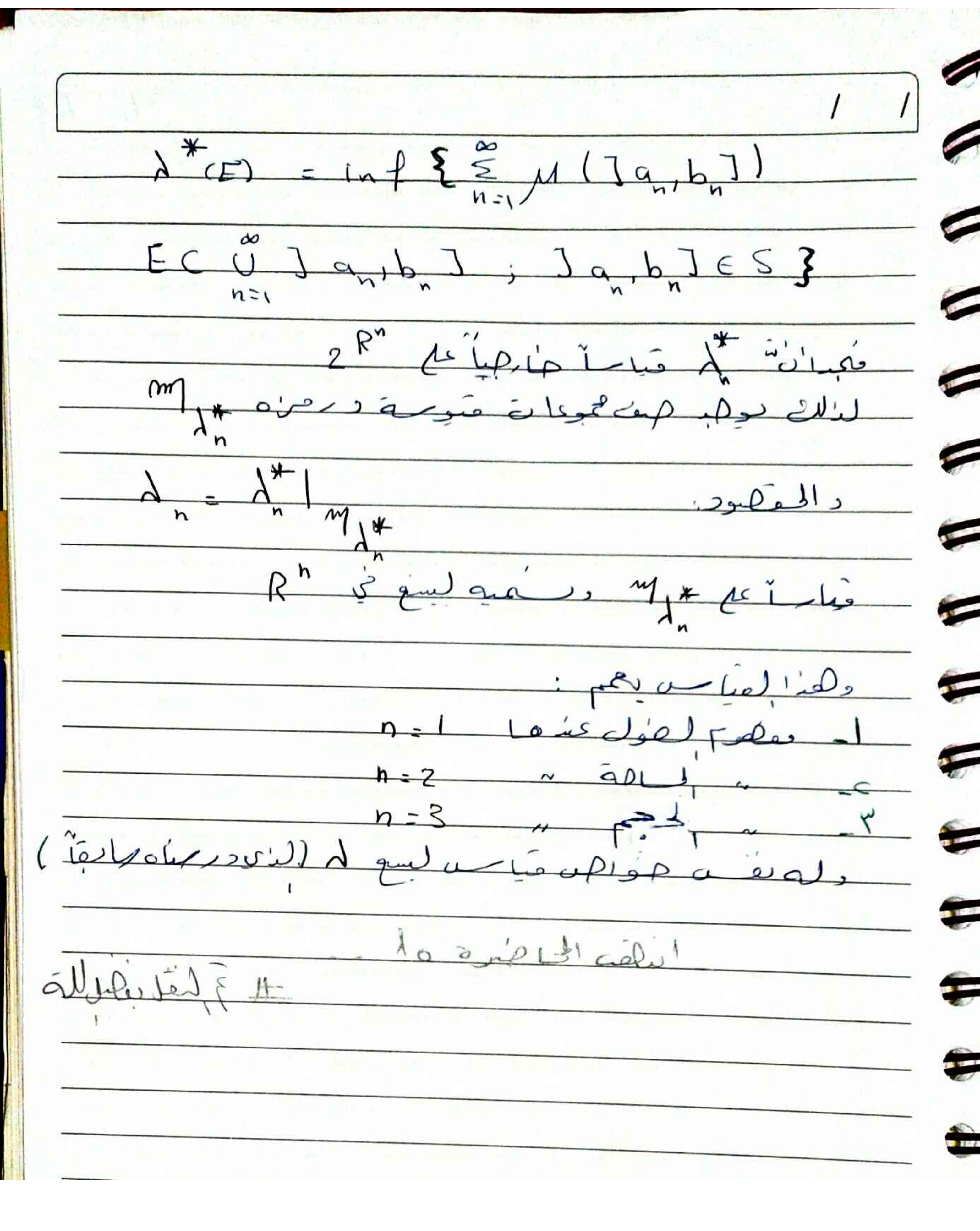
$$\overset{n}{\underset{i=1}{X}}]a_i, b_i] \to \overset{n}{\underset{i=1}{M}} (b_i - a_i)$$

والآن:
نعرف دالة مجموعات بالشكل:

$$\lambda_n^* : 2^{R^n} \to]-\infty, +\infty]$$
$$E \to \lambda_n^*(E)$$

بالشكل:

$$\lambda_n^*(E) = \inf \{ \sum_{n=1}^{\infty} M^n (\overset{n}{\underset{i=1}{X}}]a_i, b_i]) \; ; \; E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (\overset{n}{\underset{i=1}{X}}]a_i, b_i]) \}$$



$$\lambda^*(E) = \inf \{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(]a_n, b_n]) \; ; \; E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}]a_n, b_n] \; ; \;]a_n, b_n] \in S \}$$

فحيث أن λ_n^* قياساً خارجياً على 2^{R^n}

لذلك توجد صف مجموعات قيوسة ورمزه $m_{\lambda_n^*}$

والمطلوب: $\lambda_n = \lambda_n^* |_{m_{\lambda_n^*}}$

قياساً على $m_{\lambda_n^*}$ ويسمى قياس لبيغ في R^n

وهذا القياس يعمم:

١- مفهوم الطول عندما $n=1$

٢- " المساحة " $n=2$

٣- " الحجم " $n=3$

وله نفس خواص قياس لبيغ λ (الذي درسناه سابقاً)

انتهت المحاضرة ٥ ٨

تمّ بفضل الله